Más ESCUELA

MATEMÁTICA

B

Guía de estudio

Educación Adultos 2000

*Material de distribución gratuita

Buenos Aires Ciudad

Vamos Buenos Aires

Tercera edición marzo 2020

Presentación de la materia

Usted ya ha estudiado esta materia en otras oportunidades y sus experiencias al respecto pueden haber sido muy variadas.

Quienes diseñamos la propuesta de enseñanza de Matemática en Educación Adultos 2000 partimos de algunas ideas generales sobre cómo estudiar esta materia que queremos compartir:

Usted utiliza en su vida diaria una gran cantidad de nociones matemáticas; las usa de manera tal que le permiten resolver diferentes situaciones relativas a su vida cotidiana. Nosotros consideramos que, partiendo de su «experiencia matemática», es posible avanzar hacia la interpretación de los conceptos matemáticos y es por eso que le proponemos no dejarla de lado al momento de ponerse a estudiar la materia.

Por otro lado, cada nuevo concepto matemático que se aprende se apoya en otros ya adquiridos como si se tratara de hileras de ladrillos que se asientan unas en otras para que la pared que se construye sea sólida. Cada adquisición pasa por una serie de etapas que van desde lo más concreto y ligado a nuestra experiencia cotidiana, hacia niveles de complejidad y abstracción cada vez mayores. Nosotros le proponemos acompañarlo en su tránsito por esas etapas de modo que pueda ir aprendiendo satisfactoriamente los temas de la materia.

En síntesis, le proponemos aprender Matemática de una manera semejante a la que el hombre ha seguido en la creación de las ideas matemáticas: descubriendo los conceptos a partir de problemas que debió resolver en su vida cotidiana (o a través de problemas de otras ciencias que requieren de conceptos matemáticos para ser resueltos) y avanzando luego hacia la resolución de problemas más complejos. Dado que la Matemática se expresa a través de un sistema de símbolos y representaciones que le es propio, también nos proponemos que usted pueda comprender el lenguaje con el que se expresa, desde su significado matemático y desde su relación con situaciones concretas.

Programa

Unidad 1:

Funciones lineales. Variación constante de una función lineal. Identificación de puntos que pertenecen al gráfico de una función. Problemas que se modelizan con funciones lineales con una variable. Ecuación de la recta.

Unidad 2:

Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Representación gráfica de sistemas de ecuaciones. Sistemas compatibles determinados. Sistemas compatibles indeterminados. Sistemas incompatibles.

Unidad 3:

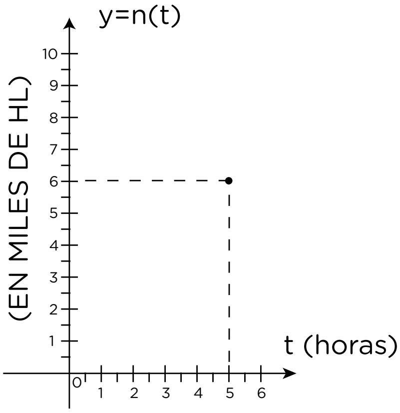
Función de proporcionalidad directa. Constante de proporcionalidad directa. Función de proporcionalidad inversa. Constante de proporcionalidad inversa. Representación gráfica de funciones de proporcionalidad directa e inversa.

Unidad 4:

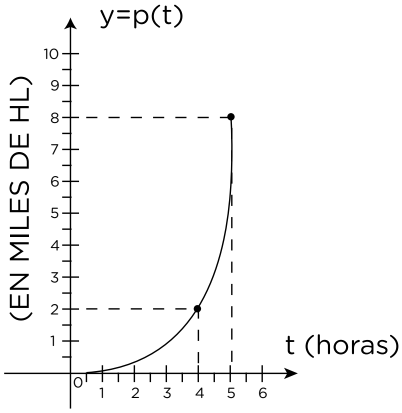
Funciones no lineales. Función cuadrática. Función exponencial. Función logarítmica. Ecuaciones cuadráticas. Ecuaciones exponenciales. Ecuaciones logarítmicas.

Unidad 5:

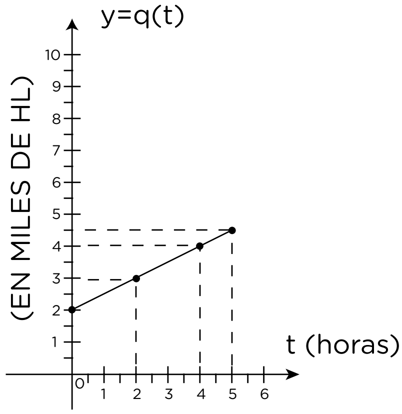
Mociones de estadística. Interpretación de información organizada en tablas, gráficos, cuadros, diagramas. Población. Muestra. Organización de la información. Tabla de frecuencias y porcentajes. Medidas de tendencia central: media, moda y mediana. Medidas de dispersión. Tipos de variables.



Pileta nº 7
n: [0; 5]→ R/y = n(t)



Pileta nº 8
p: [0; 5]→ R/y = p(t)



Pileta nº 9
q: [0; 5]→ R/y = q(t)

Le pedimos que observe las dos primeras representaciones gráficas y que a partir de ellas responda:

1. Las piletas que representan estos gráficos, ¿se estuvieron llenando o vaciando?

2. ¿Qué cantidad de hectolitros tenía cada una de ellas al inicio de la observación?

3. ¿Qué cantidad de hectolitros tuvo cada una de ellas al finalizar la primera hora de trabajo? ¿Y al finalizar la segunda hora? ¿Y al finalizar la tercera hora?

4. Complete la siguiente tabla:

Tiempo *t*, en horas	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Cantidad y de hectolitros de agua en la pileta n.° 1						
Cantidad y de hectolitros de agua en la pileta n.° 2						

5. A partir de la tabla anterior indique: ¿qué cantidad de hectolitros ingresó en cada una de las piletas durante la primera hora de trabajo? ¿Y durante la segunda hora? ¿Y durante la tercera hora?

6. ¿Qué diferencia observa en la forma en que se llenó o vació la pileta n.° 1 respecto de la forma en que se llenó o vació la pileta n.° 2? Describa esa diferencia con sus palabras.

Orientaciones

En la primera pileta ingresó la misma cantidad de hectolitros por hora, es decir, el contenido de la pileta aumentó **un valor constante por unidad de tiempo** o aumentó a una **velocidad constante de 2hl/h** (dos hectolitros por hora).

Actividad 2

1. Considere los gráficos de la actividad 1 correspondientes a las piletas que se estuvieron llenando durante todo el período de observación y responda:

Actividad 4

1. Vuelva a mirar el gráfico correspondiente a la pileta n.° 9 y complete la tabla que le damos a continuación formulándose previamente las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la velocidad con que varía su contenido?
- ¿Qué cantidad de hectolitros tenía la pileta al inicio de la observación?
- ¿Qué puede decirse de su contenido una hora después de iniciada la observación? ¿Y dos horas después?

Tiempo *t*, en horas	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Cantidad **y** de hectolitros de agua en la pileta n.° 9						

2. De acuerdo con los datos que le proporcionan sus respuestas a las preguntas anteriores, y teniendo en cuenta la tabla que acaba de completar, escriba una fórmula que permita calcular la cantidad y de hectolitros de agua que contiene la pileta n.° 9 en cada instante t. Complete la siguiente igualdad: y = ____________

3. Repita lo que analizó para la pileta n.° 9 en el ítem anterior, para las piletas n.° 1, 4 y 6. Es decir, encuentre en cada caso una fórmula que le dé la cantidad **y** de hectolitros de agua que tiene cada pileta en cada instante **t**.

4. En cada una de las fórmulas que usted determinó:

- ¿Dónde aparece expresado el valor de la velocidad de variación del contenido de la pileta? Señálelo en cada una de las fórmulas.
- ¿Dónde aparece expresada la cantidad de hectolitros que tiene la pileta en el momento inicial de las observaciones? Señálelo en cada una de las fórmulas.

5. Si la fórmula que da la cantidad de hectolitros y que contiene «una pileta cualquiera» cuyo contenido varía a velocidad constante en cada instante **t** es **y** = **m** · **t** + **b**,

- ¿Qué indica **m**?
- ¿Qué indica **b**?

Orientaciones

La fórmula que da la cantidad y de hectolitros de agua para cada instante **t**, por ejemplo en la pileta **n.° 6**, es **y** = **- 2 t + 10**.

En esta fórmula aparece expresado el valor de la velocidad de variación del contenido de la pileta en el número **- 2**, ya que esta pileta se estuvo **vaciando a razón de 2hl por hora**.

El número 10 expresa la cantidad de hectolitros de agua que contiene la pileta en el momento inicial, es decir en **t = 0**.

Ecuación de una recta. Función lineal

Cualquiera de las fórmulas anteriores es de la forma **y = m · t + b**. Cada una de ellas indica la cantidad y de hectolitros de agua en cada instante **t**, cuando el contenido de cada pileta está variando en forma constante o a velocidad constante **m**, siendo el contenido inicial **b** hectolitros.

1. Defina para cada uno de los recipientes una función que describa la cantidad de litros de agua que contiene en función del tiempo trascurrido en minutos.

2. ¿Cómo son las pendientes de ambas ecuaciones?

3. Grafique ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

4. ¿En algún instante los dos recipientes tendrán la misma cantidad de agua?

5. Trace las rectas que contienen a cada uno de los segmentos graficados. ¿Se cortan en algún punto dichas rectas?

Orientaciones

Las rectas trazadas de acuerdo a las indicaciones del ítem 5 no se cortan, son rectas paralelas. Las rectas que son la representación gráfica de funciones lineales son paralelas si sus pendientes son iguales.

Actividad 7

Determine, analíticamente, la ecuación de la recta paralela a la de ecuación y = 2 x +7 que «pasa» por el punto (4 ; 3).

Orientaciones

Recordemos que dada una recta y un punto que no pertenece a la misma, existe una única recta paralela a la misma y que «pasa» por el punto indicado.

La ecuación de la recta a determinar debe tener pendiente 2 y entonces es una expresión del tipo y = 2 x + b. Por otro lado, el punto (4 ; 3) debe pertenecer a la recta y entonces debe ser solución de la ecuación y = 2 x + b.

Reemplazamos la x por 4 y la y por 4 y resolvemos la ecuación resultante:

$3 = 2 \cdot 4 + b$

$3 = 8 + b$

$3 - 8 = b$

$-5 = b$

Entonces la ecuación de la recta es y = 2 x – 5.

Actividad 8

Determine, analíticamente, la ecuación de la recta a la que pertenecen los puntos (1 ; -2) y (3 ; -8).

Orientaciones

Dado que los puntos (1 ; -2) y (3 ; -8) deben pertenecer a la misma recta, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$-2 = a \cdot 1 + b$
$-8 = a \cdot 3 + b$

Actividad 10

Resuelva los siguientes problemas:

1. Don Gregorio es repartidor de plaguicidas líquidos en el campo. Lleva los plaguicidas desde la fábrica hasta las granjas, chacras y estancias de sus clientes. Cobra $ 30 por cada litro de plaguicida, y por el servicio a domicilio cobra $ 40. Por limitaciones legales en el medio de transporte no puede llevar más de 100 litros por viaje.

a) ¿Cuánto le cobra Don Gregorio a un cliente que le compra 17 litros de plaguicida?

b) ¿Cuánto le cobra a un cliente que le pide 65 litros?

c) ¿Y a uno que le pide 30,5 litros?

d) Pasa una vez por mes por el establecimiento de cada cliente. Si un mes, al visitar a un cliente, este le dice que no necesita plaguicida, ¿cuánto le cobra?

e) ¿Y si un cliente le pide 100 litros?

f) Si llamamos **x** a la cantidad de litros de plaguicida que compra un cliente de Don Gregorio y llamamos **y** al importe a pagar por dicha compra, escriba una fórmula que le permita calcular **y** a partir de **x**.

g) Defina una función **f** que describa la situación concreta planteada. Es decir, la función que relaciona la cantidad de plaguicidas que puede vender Don Gregorio a cada cliente con el importe a pagar.

h) Dé el dominio de la función que definió en el ítem **g**.

i) Si por una compra un cliente le paga $ 460 a Don Gregorio, ¿cuántos litros de plaguicida compró?

j) Represente la función **f** en un sistema de ejes coordenados cartesianos.

k) A partir del gráfico que hizo en el ítem anterior, dé el conjunto imagen de dicha función.

2. Juan alquila un puestito de ventas en una feria a $200 por día en el que solo vende peras a $40 el kilogramo.

a) Escriba una fórmula que describa la ganancia diaria de Juan en función de los kilogramos de peras vendidos.

b) Determine analíticamente cuántos kilogramos de peras debe vender Juan para no perder dinero.

3. En el siguiente gráfico se ha representado la demanda **d** de un producto en función del precio p de venta por unidad de dicho producto.

a) Cuando el precio de venta de cada unidad del producto es de $ 1, o sea **p = 1**, ¿qué cantidad **d** del producto es demandado?

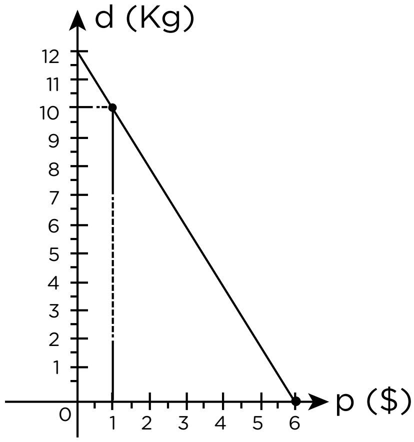
b) Si el precio de venta es de 6 pesos la unidad, ¿cuál es la demanda?

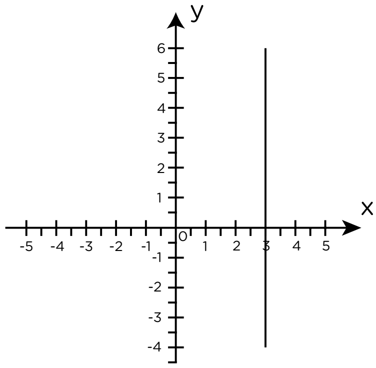
c) Si aumenta el precio de venta unitario, ¿qué ocurre con la demanda?

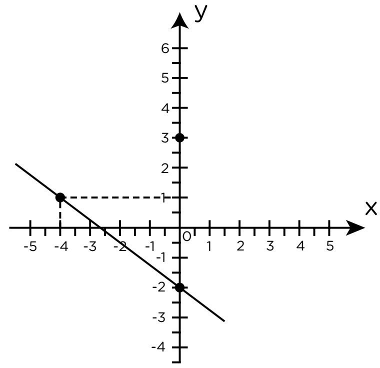
d) ¿A qué velocidad disminuye la demanda?

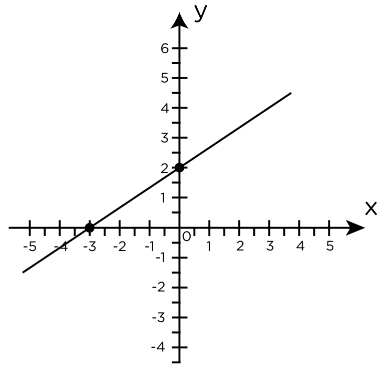
e) Encuentre una fórmula que permita calcular la demanda d para cada precio de venta unitario p.

f) Escriba una función que describa la situación concreta planteada.









9. Determine en cada caso, la ecuación de una recta que verifique las siguientes condiciones:

a) Una recta de pendiente –2 que pase por el punto (0 ; 5).

b) Una recta de pendiente –2 que pase por el punto (1 ; 4)

c) Una recta de ordenada al origen 3 y que pase por el punto (4 ; 11)

d) Una recta paralela a la del ítem c) que corte el eje x en x = 5.

Actividades de autoevaluación

1. Una pileta contiene 2.000 litros de agua y se desagota a razón de 12 litros por minuto. ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite calcular la cantidad (y) de litros que tiene el tanque en cada instante (x, en minutos) desde el inicio del «desagote» hasta el instante en que el tanque queda vacío? :

a) $y = 12x - 2.000$.

b) $y = -12x + 2.000$.

c) $y = 12x$.

d) $y = 2.000x$.

2. Un móvil A se desplaza de tal manera que la posición y (en metros respecto a un punto de referencia) en función del tiempo x (en minutos) está dada por la función $f : [0;12] \rightarrow \mathbb{R} \,/\, y = 4x + 11$. Tres de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Indique cuáles son:

a) La fórmula y = 5x + 7 corresponde a otro móvil B que se desplaza en el mismo sentido y con una velocidad mayor que la del móvil A.

b) La fórmula y = 3x + 11 corresponde a otro móvil C que se desplaza en el mismo sentido, con la misma velocidad y con distinta posición inicial que la del móvil A.

c) La fórmula y = 5x + 8 corresponde a otro móvil D de manera tal que en el minuto tres se encuentra en la misma posición que el móvil A.

d) La fórmula y = 4x + 3 corresponde a otro móvil E que se desplaza en el mismo sentido, con distinta velocidad y con la misma posición inicial que la del móvil A.

e) La fórmula y = -4x + 7 corresponde a otro móvil F que se desplaza en sentido contrario y con distinta posición que la del móvil A.

Unidad 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Actividad 1

Luis Alberto consulta en dos agencias acerca de la tarifa correspondiente al alquiler de un auto por un día. Los resultados fueron: Agencia A, \$150 por el retiro del auto más \$3 por kilómetro recorrido. Agencia B, \$300 por el retiro del auto más \$2 por kilómetro recorrido. Sean x es la cantidad de kilómetros recorridos en el día y P el precio a pagar por el alquiler del auto.

a) Complete la siguiente tabla:

x	P_A	P_B
0		
100		
200		
		1200

b) Escriba dos fórmulas, una para cada agencia, que permita calcular el precio a pagar sabiendo la cantidad de kilómetros recorridos (en función de la cantidad de kilómetros recorridos).

c) Utilice las fórmulas para determinar el precio a pagar en cada agencia para 760 km y 1260 km.

d) Utilice las fórmulas para determinar, en cada agencia, cuántos kilómetros puedo recorrer si dispongo de \$720 para el alquiler del auto.

e) ¿Para qué cantidad de kilómetros recorridos es indistinto alquilar el auto en una agencia o en la otra?

f) Represente en un mismo sistema de coordenadas ambas funciones. ¿Se cortan en algún punto? Halle, analíticamente dicho punto.

g) Indique los «intervalos de conveniencia» de cada agencia.

Orientaciones

Las fórmulas para cada agencia son $P_A = 3x + 150$ y $P_B = 2x + 300$. Para determinar para qué cantidad de kilómetros es indistinto alquilar una u otra agencia podemos resolver la ecuación $P_A = P_B$. Esto es, para qué valor de x se verifica $3x + 150 = 2x + 300$. Entonces:

$3x - 2x = 300 - 150$

$x = 150$

Y podemos verificar que si recorremos con el auto alquilado 150 kilómetros ambas agencias cobran \$600.

Acabamos de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (letras) que se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{cases} P_A = 3x + 150 \\ P_B = 2x + 300 \end{cases}$$

Como ya vimos en la unidad 1, las rectas paralelas al eje y (el vertical) no son la representación gráfica de funciones lineales, por lo que también son sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas las expresiones del tipo:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = c \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = a \\ y = bx + cd \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = a \\ y = b \end{cases}$$

Actividad 2

Determine si el punto (1 ; 5) es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x + 8 \end{cases}$$

Orientaciones

Reemplazamos la x por 1 y la y por 5 en cada una de las ecuaciones:

$\begin{cases} 5 = 2 \cdot 1 + 3 \\ 5 = 1 + 8 \end{cases}$ y resulta que la primera igualdad es verdadera, pero la segunda no.

Entonces (1 ; 5) no es solución del sistema de ecuaciones.

Actividad 3

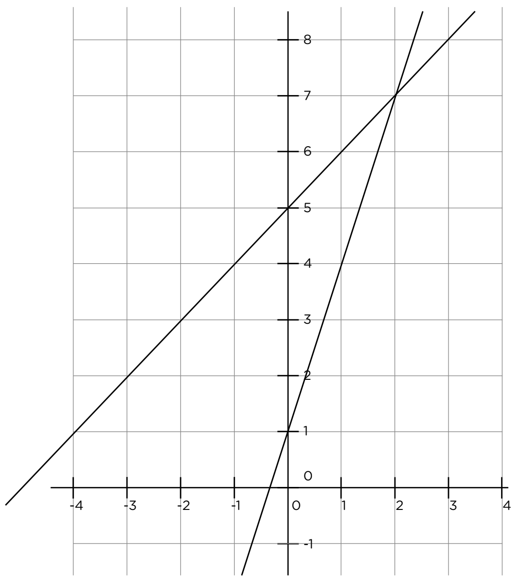
Resuelva (halle el conjunto solución) de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 4x + 7 \\ y = 4x + 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Orientaciones

a) Observemos que el sistema consiste en dos ecuaciones de rectas con pendientes diferentes, 3 y 1, por lo tanto podemos anticipar que ambas rectas se «cortarán» en un solo punto. En este caso el **único** punto de intersección entre ambas rectas es (2 ; 7) y el conjunto solución es:

$S = \{(2; 7)\}$. A continuación, la representación gráfica del sistema de ecuaciones:



Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Si el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una única solución, como el del ítem a) de la actividad anterior, diremos que es un **sistema compatible determinado**. En la representación gráfica tendremos dos rectas que se cortan. ¿Cómo son las pendientes de esas rectas?

Si el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas no tiene solución, como el del ítem b), diremos que es un **sistema incompatible**. ¿Cómo son las rectas en este caso? ¿Qué sucede con las pendientes?

Si el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, como el del ítem c), diremos que es un **sistema compatible indeterminado.**

¿Cómo son las rectas en este caso? ¿Qué sucede con las pendientes?

Actividad 4

En un recital se ofrecieron entradas populares a \$50 y plateas a \$80. En total se vendieron 323 entradas y se recaudaron \$18.400. ¿Cuántas populares y cuántas plateas se vendieron? Exprese la situación planteada mediante un sistema de ecuaciones y luego resuélvalo.

Orientaciones

Llamaremos **x** a la cantidad de entradas populares vendidas y llamaremos y a la cantidad de plateas vendidas. Como cada popular se vendió a \$50, cada platea a \$80 y la recaudación total fue de \$18.400, entonces 50x + 80y = 18400.

Se vendieron 323 entradas, entonces x + y = 323.

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} x + y = 323 \\ 50x + 80y = 18400 \end{cases}$

Vamos a reescribir el sistema con el formato de la actividad 1, $\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$, y luego lo resolvemos.

Para ello, en ambas ecuaciones escribiremos a la letra y en función de la letra x:

$$\begin{cases} y = 323 - x \\ y = \dfrac{18400 - 50x}{80} \end{cases}$$

Lo resolvemos:

$$323 - x = \frac{18400 - 50x}{80}$$

$$(323 - x) \cdot 80 = 18400 - 50x$$

$$323 \cdot 80 - x \cdot 80 = 18400 - 50x$$

$$25840 - 18400 = -50x + 80x$$

$$7440 = 30x$$

$$\frac{7440}{30} = x$$

$$248 = x$$

Hallamos el valor de x, resta hallar el valor de y. Para ello reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones la x por 248:

$$y = 323 - x$$

$$y = 323 - 248$$

$$y = 75$$

4. Halle el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 5x - y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 6x + 8y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ 3x + 12y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ x = 6 \end{cases}$

5. Resuelva cada uno de los siguientes problemas.

a) Hoy un juego de muebles de dormitorio vale $ 720 y su precio aumenta a

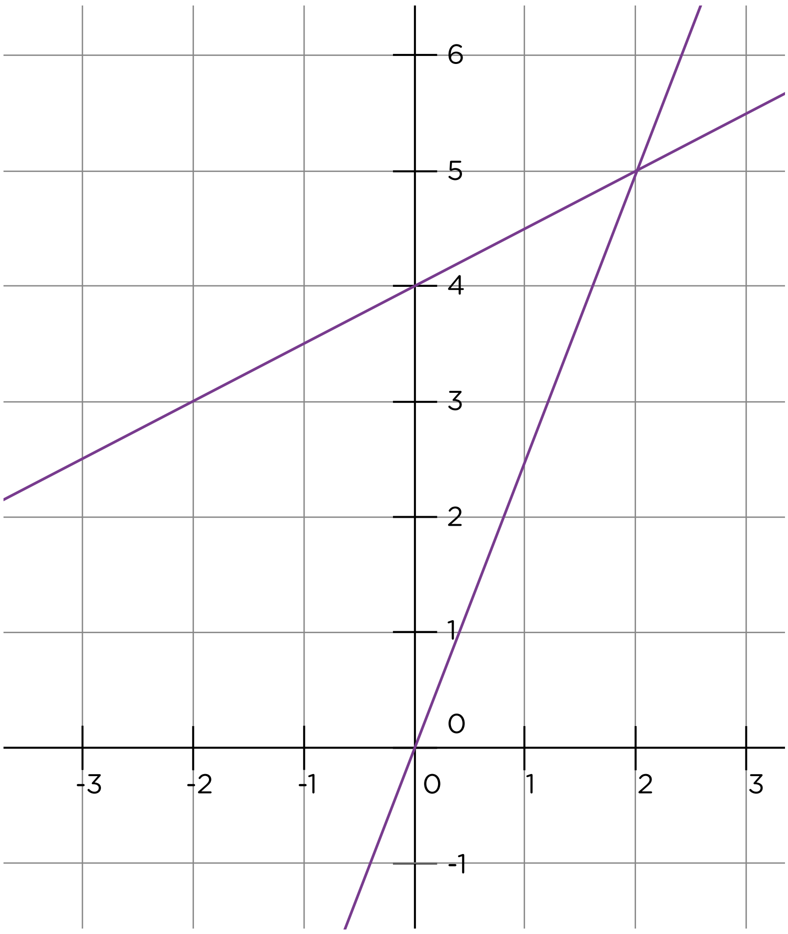
razón de $10 por mes. Ignacio tiene posibilidad de ahorrar $ 50 por mes y hoy tiene $ 80. ¿Cuántos meses tendrá que esperar para poder comprar ese juego de muebles? ¿Cuánto costarán los muebles entonces?

b) En un partido de básquet, el equipo Embogol anotó 3 tantos menos del doble de lo que anotó el equipo Errogol. En el partido hubo 156 tantos. ¿Cuál fue el resultado del partido?

c) En una librería una carpeta cuesta $ 2 y un cuaderno vale $ 3. Por compras al por mayor se hace un descuento de $ 10. Los padres de los alumnos de un curso se organizan para realizar una compra comunitaria y beneficiarse con el descuento. En total deben comprar 60 artículos y recaudaron $ 128. ¿Cuántas carpetas y cuántos cuadernos podrán comprar usando exactamente el dinero recaudado?

Actividades de autoevaluación

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales representado a continuación:



Unidad 3

Funciones de proporcionalidad directa. Funciones de proporcionalidad inversa

Actividad 1

En la feria del barrio hay varios puestos que venden frutas. En algunos de esos puestos se hacen ofertas por compras de grandes cantidades. Cada puestero, don Manuel, don José y doña Perla, va registrando las compras que hacen sus clientes. Anota la cantidad de mercadería que vende en cada oportunidad y el dinero que cobra. Las siguientes tablas muestran lo que registró cada uno:

Puesto de don Manuel									
x (kg de manzanas)	0,5	1	1,5	2,5	3	4	5	10	15
y ($)	1	2	3	5	6	8	10	20	30

Puesto de don José						
x (kg de peras)	0,5	1	2	4	8	10
y ($)	0,75	1,5	3	5	10	12

Puesto de doña Perla					
x (kg de duraznos)	1	2	4	10	20
y ($)	2,5	4,5	8	18	35

1. Usando la información anterior, responda las siguientes preguntas:

a. Cualquiera sea la cantidad de manzanas vendida en el puesto de don Manuel, ¿se venden al mismo precio por kilogramo?

b. Cualquiera sea la cantidad de kilogramos de peras vendida en el puesto de don José, ¿se cobra el mismo precio por kilo?

c. Cada kilogramo de duraznos vendido en el puesto de doña Perla, ¿vale lo mismo?

2. Teniendo en cuenta lo respondido en el ítem 1, ¿en cuál o cuáles de los puestos se hacen ofertas por la venta de grandes cantidades de frutas?

3.

a) ¿Es posible calcular el precio de venta del kilogramo de fruta para cualquier venta en cada puesto?

b) ¿En qué puesto o puestos es posible calcular el precio de venta del kilogramo de fruta para cualquier venta? ¿En cuál o cuáles no es posible?

c) Fundamente las respuestas que dio en el ítem b.

4.

a) Represente en un sistema de ejes coordenados los puntos que expresan el precio y a pagar en función de la cantidad x de kilogramos de manzanas que se compren en el puesto de don Manuel.

Cuando realizamos las divisiones **y : x** para las posibles compras en el puesto de don Manuel, los resultados dan todos 2 (que es el precio de 1kg de manzanas). En cambio, al hacer lo mismo con las posibles compras en los otros puestos, de don José y de doña Perla, los cocientes dan distintos valores, ya que el precio de 1kg de fruta no es siempre el mismo. Si se compran grandes cantidades, cada kilogramo vale menos.

La fórmula que permite calcular el precio **y** a pagar por la compra de **x** kg de frutas, resulta una fórmula lineal solo en el caso del puesto de don Manuel.

La fórmula es **y = 2 · x**.

En los casos de los otros dos puestos, no hay una fórmula sencilla que permita calcular el precio y a pagar por **x** kilogramos de frutas.

Actividad 2

Las siguientes tablas muestran posibles compras de frutas en otros puestos:

Puesto de doña Rosa					
x (kg de naranjas)	2	3	4	5	6
y ($)	2,5	3,75	5	6,25	7,5

Puesto de don Carlos					
x (kg de naranjas)	2	3	4	5	6
y ($)	3,5	5,25	6,75	8	9

Usando la información de estas tablas, responda las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál de estos dos puestos se cobra siempre lo mismo por cada kilogramo de frutas?

2. Represente gráficamente los puntos que expresan el precio a pagar en función de las cantidades de kilogramos de frutas vendidas en estos dos puestos.

3. Para el puesto en que se cobra siempre lo mismo por cada kilogramo de frutas:

a) ¿Cuánto vale cada cociente y : x?

b) Desde el punto de vista de la situación planteada de estos dos puestos, ¿con qué valor coincide dicho cociente?

c) Escriba la fórmula que le permite calcular el precio y que se debe pagar por comprar x kg de fruta en ese puesto.

Actividad 3

En una empresa llenan semanalmente dos tanques con combustible para el uso de sus maquinarias.

Cada tanque tiene una capacidad de 9 hectolitros (hl).

Para llenar uno de los tanques se usa una bomba denominada HTK y el otro se llena con la bomba FPD.

Quieren controlar el funcionamiento de ambas bombas.

A José le encargaron tomar la información de la bomba HTK y a Pedro de la bomba FPD.

Entre José y Pedro acordaron en llenar simultáneamente los dos tanques, llamar t = 0 hora al instante inicial y registrar la cantidad de combustible que contenía el tanque cada media hora.

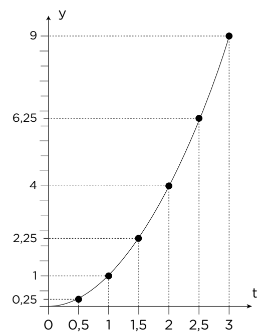
Al terminar, cada uno presentó un informe. Los informes son los siguientes:

Bomba HTK

En la siguiente tabla se describe la cantidad ***y*** de hl de combustible que tenía en el tanque, en los intasntes ***t*** (en horas) en que se observó:

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

A partir de la tabla, se representó gráficamente lo que ocurrió en el transcurso de las tres horas en que se llenó el tanque. El gráfico es el dado a la derecha.

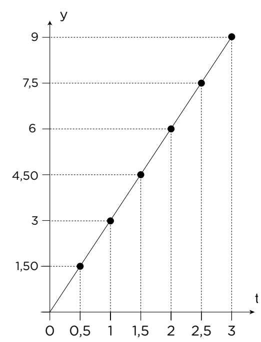


Bomba FPB

En la siguiente tabla se describe la cantidad ***y*** de hl de combustible que tenía en el tanque, en los intasntes ***t*** (en horas) en que se observó:

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9

A partir de la tabla, se representó gráficamente lo que ocurrió en el transcurso de las tres horas en que se llenó el tanque. El gráfico es el dado a la derecha.



1. Teniendo en cuenta lo que puede observar en cada tabla y su respectivo gráfico, ¿usted diría que los tanques se llenaron de la misma «forma»? ¿Por qué? Explíquelo con sus palabras.

2. El jefe de José y Pedro les hizo algunas preguntas respecto de la forma en que se llenaron los tanques, o de la forma en que actuaron las bombas para llenarlos.

a) Para cada pregunta responda lo que diría José respecto del llenado del tanque con la bomba HTK y lo que diría Pedro respecto de cómo se llenó el tanque con la bomba FPD.

- ¿Qué cantidad de hectolitros de combustible entró en el tanque durante la primera media hora de funcionamiento de la bomba?
- ¿Y durante la segunda media hora?
- ¿Y durante la tercera media hora?

b) ¿Podría usted decir que en cada tanque entró la misma cantidad de hectolitros de combustible por cada media hora que iba transcurriendo?

c) Para responder la siguiente pregunta observe cada tabla y cada gráfico: ¿Podría decir

Orientaciones

En el tanque llenado por la bomba FPD, la cantidad de hectolitros de combustible aumenta a velocidad constante. Es decir, en dicho tanque entra la misma cantidad de combustible en una hora y esto ocurre en cualquier hora que se considere.

En los gráficos de las dos funciones que describen el llenado de los tanques, observamos que para el tanque llenado con la bomba FPD resultan puntos alineados con el origen de coordenadas. En cambio, en el gráfico correspondiente al llenado del tanque con la bomba HTK, los puntos no quedan alineados.

También se puede observar que, en el tanque llenado con la bomba FPD, resulta que al calcular las divisiones **y : t** los cocientes resultan todos iguales a 3.

Es decir, resulta **y : t = 3**. Esta constante expresa la cantidad de hectolitros de combustible que entran al tanque por hora. Además, la fórmula que permite obtener la cantidad y de hectolitros en cada instante *t* es **y = 3 · t**.

Por lo tanto, podemos decir que en el llenado del tanque FPD, la cantidad de hectolitros es directamente proporcional al tiempo.

En cambio, en el tanque HTK, la cantidad de hectolitros no es directamente proporcional al tiempo.

Actividad 4

Martín es empleado en una fábrica de jarabes. En esa fábrica se producen 12 litros de jarabe por hora. La producción de jarabe de cada hora se envasa en recipientes de distintos tamaños según el uso que se le vaya a dar.

Martín es el encargado de decidir cuántos recipientes se van a usar para el envasado.

1. La producción de la primera hora de trabajo de un día debe envasarse en recipientes de 2 litros cada uno. ¿Cuántos recipientes se necesitan?

2. La producción de la segunda hora se envasa en recipientes de 1 litro cada uno. ¿Cuántos recipientes se necesitan?

3. La producción de la tercera hora va en recipientes de $\frac{1}{2}$ litro cada uno. ¿Cuántos recipientes hacen falta?

4. Martín confeccionó la siguiente tabla para organizar la información de cuántos recipientes necesita para envasar la producción de jarabe de una hora según la capacidad de cada uno de ellos. Complétela.

x (capacidad de cada recipiente en litros	2	1	$\frac{1}{2}$	3	4	6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	12	$\frac{1}{3}$
y (cantidad de recipientes)	*6*	*12*	*24*							

5. Para poder prever la cantidad *y* de recipientes que debe disponer para envasar la producción de una hora si la capacidad de cada uno es de *x* litros, Martín decidió buscar una fórmula que le permita calcular *y* a partir de conocer *x*.

Le pedimos que dé la fórmula hallada por Martín, teniendo en cuenta los cálculos que hizo para completar la tabla anterior.

6. Teniendo en cuenta los pares de valores obtenidos en la tabla anterior, represente en un sistema de ejes coordenados cartesianos los puntos que expresan la cantidad y de recipientes necesaria para envasar *x* litros de jarabe.

Actividad 6

En el mes de abril gastó el dinero de su sueldo de manera que la cantidad y que le queda después de x días del cobro está indicada en la siguiente tabla:

x (días después del cobro)	1	2	3	4	5	6
y (dinero que le queda)	6.000	3.000	2.000	1.500	1.200	1.000

1. Entre las siguientes fórmulas, elija la que permite calcular el dinero y que le queda a Martín x días después de haber cobrado.

a) $y = 6.000 + 200x$ b) $y = \dfrac{6.000}{x}$ c) $y = 6.000 - 200x$

2. Defina una función *h* que describa lo que ocurre con el dinero de Martín en los 6 primeros días después del cobro.

3. Represente la función *h* que definió en el ítem anterior en un sistema de ejes coordenados cartesianos.

Proporcionalidad inversa. Funciones de proporcionalidad inversa

En el caso del envasado de jarabes y en el del dinero que le queda a Martín en abril, las magnitudes que intervienen se relacionan de manera que al multiplicar x . y el resultado es siempre el mismo, es decir, es constante. Cuando esto ocurre, decimos que las magnitudes son **inversamente proporcionales** entre sí. La constante obtenida se llama **constante de proporcionalidad**.

En el caso del dinero que le queda a Martin en el mes de marzo, si bien con el paso de los días disminuye el dinero que le queda, no hay proporcionalidad inversa. En el caso del envasado de jarabes, dicha constante es **12** y expresa la cantidad de litros de jarabe producidos por hora.

En el caso de la cantidad de dinero que le queda a Martín en abril, la constante es **6.000** y expresa su sueldo mensual.

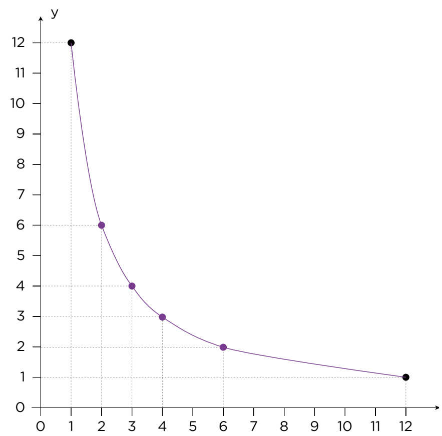
La función $f: [\frac{1}{10}\,; 12] \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(x) = \frac{12}{x}$, que describe la situación del envasado de jarabe, y la función $h: \{1\,; 2\,; 3\,; 4\,; 5\,; 6\} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, h(x) = \frac{6.000}{x}$ que describe lo que ocurre con el dinero de Martín en los 6 primeros días del mes, son **funciones de proporcionalidad inversa**.

En general, llamamos función de proporcionalidad inversa a aquella de la forma:

$f: A \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(x) = \frac{c}{x}$ (donde el conjunto **A** es un dominio adecuado a cada situación, **c** es la constante de proporcionalidad y **x** es un número real distinto de cero).

Si se representa una función de proporcionalidad inversa, se obtienen puntos que están sobre una curva llamada hipérbola. Por ejemplo, la representación gráfica de la función:

$f: [\frac{1}{10}\,; 12] \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(x) = \frac{12}{x}$ es la siguiente:



Actividad 8

Resuelva los siguientes problemas:

1.

a) Determine en cuáles de las siguientes tablas hay proporcionalidad directa entre *x* e *y*.

b) Determine en cuáles de las siguientes tablas hay proporcionalidad inversa entre *x* e *y*.

c) Explique qué tiene en cuenta para responder los ítems *a* y *b*.

x	2	4	5	8
y	6	3	2	1

x	3	7	12	15
y	4,5	10,5	18	22,5

x	5	3	2	0,5
y	6	10	15	60

x	2	4	5	8
y	-4	-8	-12	-16

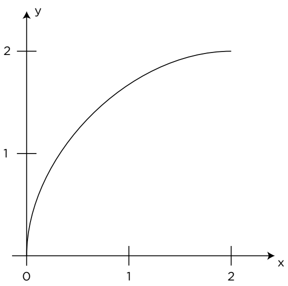
x	9	5	3	1
y	7	3	1	-1

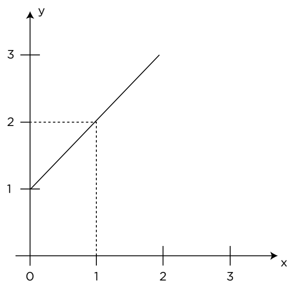
2.

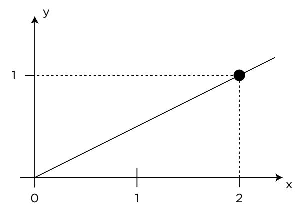
a) Determine en cuáles de los siguientes gráficos hay proporcionalidad directa entre *x* e *y*.

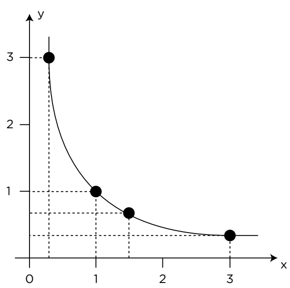
b) Determine en cuáles de los siguientes gráficos hay proporcionalidad inversa entre *x* e *y*.

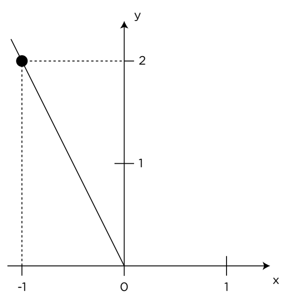
c) Explique qué tiene en cuenta para responder los ítems a y b.

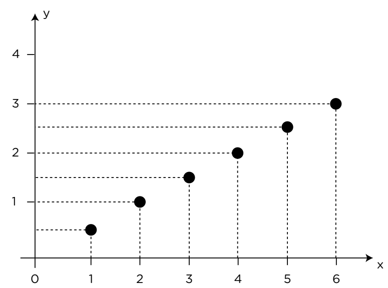












3.

a) Determine cuáles de las siguientes fórmulas corresponden a funciones de proporcionalidad directa.

b) Determine cuáles de las siguientes fórmulas corresponden a funciones de proporcionalidad inversa.

6. Responda a las siguientes preguntas:

a) Si por 3kg de manzanas se paga $6, ¿cuánto debe pagarse por 1/4kg de manzanas?

b) Si se venden manzanas a razón de $2 el kg, ¿cuánto debe pagarse por 7kg?

7. Responda:

a) Un móvil que se mueve a velocidad constante recorrió 80 km en 2 horas. ¿Puede usted determinar cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas?

b) Un auto se desplaza de un pueblo a otro. La distancia entre los pueblos es de 500 kilómetros. Cuando pasaron 3 horas había recorrido 300 km. ¿Puede usted determinar cuánto tiempo le falta para llegar?

c) En un pueblo se distribuye el agua potable a través de una cooperativa. Cada casa de familia debe pagar una tarifa que consiste en una cuota mensual de $20 más un monto proporcional a lo consumido en el mes. Una familia que consumió 100hl en un mes pagó a la cooperativa un total de $60. ¿Cuál es la cifra correspondiente a una familia que consume 200hl al mes?

d) En una ferretería hay un cartel que dice: «Por cada 100 metros de manguera para riego que compre, le regalamos 2 metros».

- ¿Qué cantidad de metros le regalarán si compra 300 metros?
- Si en el cartel dijera: «Le regalamos el 3 % de la cantidad de metros de manguera para riego que usted compre». ¿Qué cantidad de metros le regalarían si compra 300 metros?

e) Al año de vida, un niño tiene una altura de 80cm. ¿Cuánto medirá cuando cumpla 18 años?

8. Cada una de las situaciones planteadas en la ejercicio 7 puede ser expresada por una función.

a) Decida si la situación puede expresarse o no con una función de proporcionalidad directa.

b) En los casos en que la situación puede expresarse con una función de proporcionalidad directa:

- Indique la constante de proporcionalidad.
- Escriba la fórmula de la función.
- Escriba la función de proporcionalidad que expresa la situación.

9. Resuelva las siguientes situaciones:

I. Un móvil se desplazó por una autopista entre un cierto lugar A y otro B. Lo realizó en 6 horas viajando a una velocidad constante de 120 km/hora. Si en otro momento realiza el mismo viaje a 100 km/hora, ¿cuánto tiempo tardará en realizarlo?

II. En una fábrica se elabora la misma cantidad de kilogramos de un fertilizante por día. Cuando lo elaborado en un día se embala en bolsas de 250 gramos se emplean 170 bolsas. Si en otra oportunidad se embalaron 85 bolsas, ¿cuántos gramos contendrá cada bolsa en dicha oportunidad?

III. El alquiler de un ómnibus para realizar una excursión es de $130. La capacidad del mismo es de 40 pasajeros. Si solo van 26 personas a la excursión,

- ¿Cuánto debe pagar cada uno para cubrir los gastos del alquiler?
- ¿Es posible que se logre que cada pasajero que concurra a la excursión abone $2,6?
- Justifique su respuesta.

4. Cuatro compañeros de trabajo ponen, cada uno, $150 para comprar un regalo. A último momento y con el regalo ya comprado se suman dos compañeros. ¿Cuánto dinero le corresponde poner a cada uno de los compañeros, en estas condiciones?

a) $150 b) $100 c) $200 d) $75

5. En una fábrica de alfajores se produjeron en un día 2.400 unidades. Para la comercialización se utilizan cajas de distinta capacidad. Tres de las siguientes afirmaciones referidas a la situación planteada son verdaderas. Indique cuáles son:

a) Si utilizan cajas con capacidad para 6 alfajores son necesarias 400 cajas.

b) Si utilizan cajas con capacidad para 12 alfajores son necesarias 200 cajas.

c) Entre la cantidad de alfajores por caja y la cantidad de cajas utilizadas existe una relación de proporcionalidad inversa.

d) Entre la cantidad de alfajores por caja y la cantidad de cajas utilizadas existe una relación de proporcionalidad directa

e) Es posible guardar la totalidad de los alfajores producidos en el día en cajas con capacidad para 9 alfajores.

2. Escriba una fórmula que exprese la tarifa total y a cobrar por un trabajo realizado en una chapa de lado *x*. Para hacerlo tenga presente las cuentas que realizó en la tabla anterior al calcular la tarifa total a partir de las diferentes medidas de los lados de las chapas.

Orientaciones

Luego de completar la tabla le habrá resultado más sencillo escribir la fórmula que expresa la tarifa *y* en función de la medida del lado *x* de la chapa. La fórmula es: $y = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4$

Observándola, podemos ver que el máximo exponente al que está elevada la variable *x* es un cuadrado. Por esa razón decimos que es una **fórmula cuadrática**.

Fórmula cuadrática

Llamamos **fórmula cuadrática** a cualquier fórmula del tipo: $y = a \cdot x^2 + b \cdot c + c$ con *a*, *b* y *c* números reales y $a \neq 0$ (*a* distinto de 0). A los números *a*, *b* y *c* los llamamos **coeficientes**.

Por ejemplo, en la fórmula $y = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4$ hallada, los coeficientes son: $a = \mathbf{3}$, $b = \mathbf{2}$, $c = \mathbf{4}$.

Actividad 2

Todas las fórmulas que siguen son fórmulas cuadráticas. Identifique, en cada una de ellas, los valores de los coeficientes a, b y c:

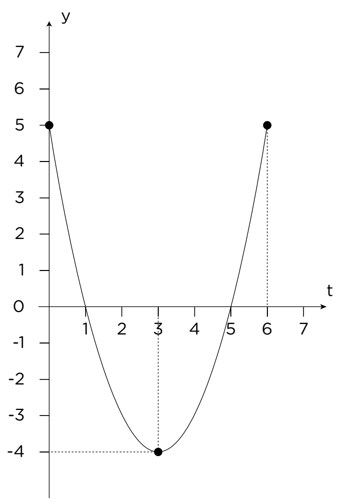
- $y = 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 3$
- $y = 3 \cdot x^2 - x + \frac{2}{3}$
- $y = -2 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 1$
- $y = \frac{3}{4} \cdot x^2 - 5 \cdot x$
- $y = -x^2 + 2$
- $y = 3 \cdot x - 5 + x^2$
- $y = x^2$
- $y = 1 - x^2$

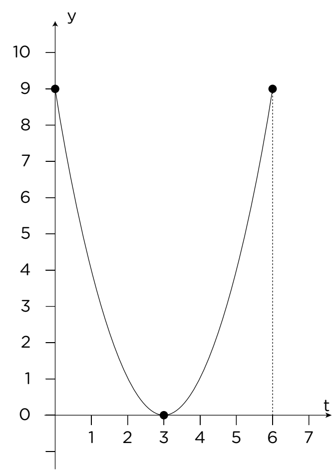
Actividad 3

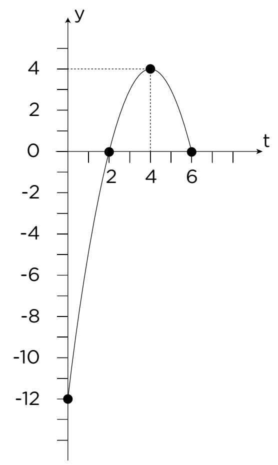
En un laboratorio se somete una barra metálica a distintas condiciones físicas. En cada caso se mide la temperatura de la barra durante los primeros 6 minutos de prueba.

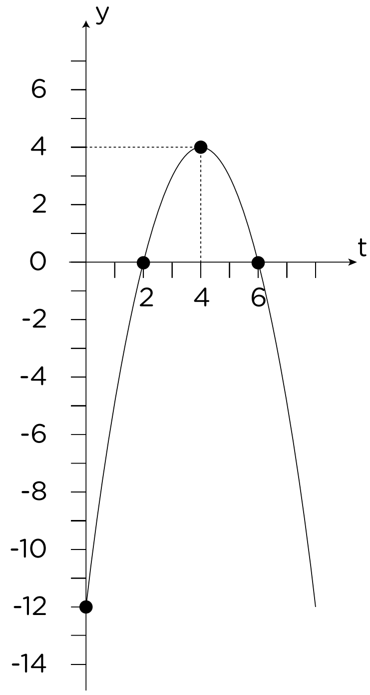
Los gráficos que siguen representan funciones que expresan, para distintos casos, la temperatura *y* (en °C) en función del tiempo *t* (en minutos) durante los 6 minutos de prueba.

Las fórmulas de las funciones graficadas son cuadráticas y están indicadas debajo de cada uno de los gráficos.









Entre las representaciones gráficas anteriores puede observar parábolas con esta forma: ∪ y parábolas con esta forma: ∩. A las primeras las llamaremos parábolas cóncavas hacia arriba y a las otras, parábolas cóncavas hacia abajo.

Las parábolas cóncavas hacia arriba alcanzan en algún valor x de su dominio, un valor $f(x)$ que es el mínimo valor de la función. Análogamente, si la parábola es cóncava hacia abajo, alcanza en algún valor x de su dominio, un valor $f(x)$ que es el máximo valor de la función. En cualquiera de los dos casos, el punto de la parábola donde la misma alcanza su punto máximo o su punto mínimo se llama vértice. Sus coordenadas son $(x_v ; y_v)$, siendo $f(x_v) = y_v$.

Como la función f toma el mismo valor y para cada par de valores de x que se encuentran a igual distancia de la recta vertical que pasa por el vértice, la gráfica de f resulta ser simétrica respecto de esta recta. Dicha recta recibe el nombre de **eje de simetría** de la parábola y su ecuación es $x = x_v$.

En el gráfico que precede este párrafo, la parábola es cóncava hacia abajo, el vértice es (4;4) y el eje de simetría es x = 4.

Actividad 4

En un laboratorio se somete una barra metálica a distintas condiciones físicas. En cada caso se mide la temperatura de la barra durante los primeros 6 minutos de prueba.

Responda las siguientes preguntas a partir de las representaciones gráficas de la actividad anterior correspondientes a cada uno de los casos:

1. Observe las representaciones gráficas correspondientes a los casos *I*, *II* y *V*, y a partir de ellas responda las siguientes preguntas:

a) ¿Son parábolas cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo?

b) ¿Cuál es el signo del coeficiente a en la fórmula correspondiente a cada una de ellas?

2. Observe ahora las representaciones gráficas correspondientes a los casos *III*, *IV* y *VI*, y a partir de ellas responda las siguientes preguntas:

Fórmulas para determinar el eje de simetría y los ceros de una función cuadrática

Dada la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de una función cuadrática, podremos determinar la ecuación del eje de simetría resolviendo el siguiente cálculo, $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.

Dada la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de una función cuadrática, podremos determinar los posibles ceros o raíces de la función cuadrática resolviendo los siguientes cálculos:

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que podemos escribir también de la siguiente manera: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplo:

Utilizando las fórmulas indicadas, hallaremos el eje de simetría y los ceros de la función cuadrática $f(x) = y = x^2 + 2x -3$.

En este caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

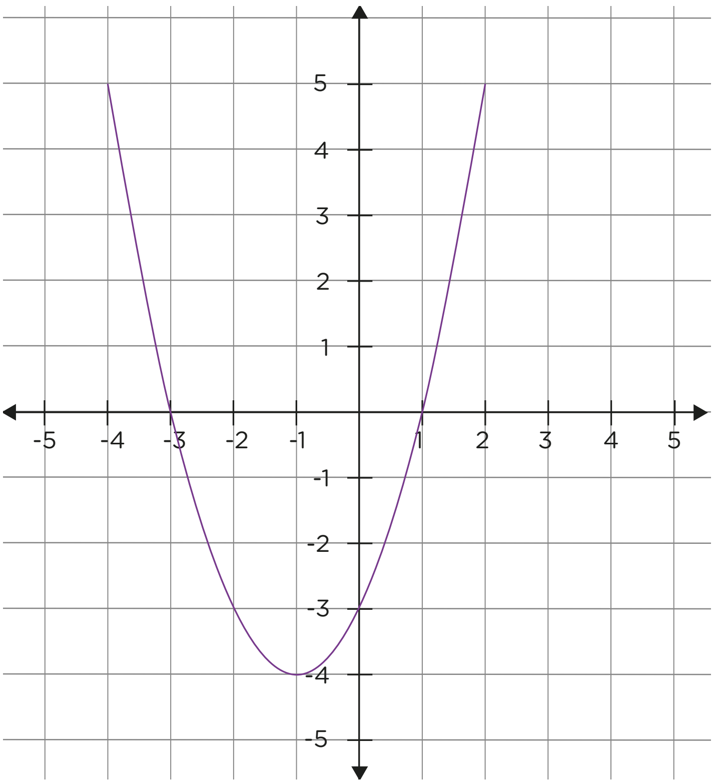
Entonces $x_v = \dfrac{-2}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$ es la ecuación del eje de simetría.

El vértice es el punto de coordenadas $(x_v \,;\, f(x_v))$, en este caso $(-1 \,;\, f(-1)) = (-1 \,;\, -4)$.

Los ceros de la función son $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 - 4}{2} = -3$

y $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 + 4}{2} = 1$.

A continuación la representación gráfica de la función $f(x) = y = x^2 + 2x - 3$, donde podemos observar que -3 y 1 son los ceros de la función y (-1 : -4) es el vértice.



disminuir, por esta razón, después de 2 horas de iniciado el proceso, se colocó un dispositivo con el fin de revertir el descenso de la temperatura. El instante en el que se puso en funcionamiento el dispositivo se consideró x = 0, y, en dicho instante, la temperatura era de 4° C. Aun con el dispositivo la temperatura siguió bajando hasta alcanzar temperaturas bajo cero, pero luego aumentó volviendo a obtener valores mayores a cero.

Gráficos:

Cada uno de los enunciados anteriores puede ser representado a través de alguno de los siguientes gráficos:

Gráfico 1

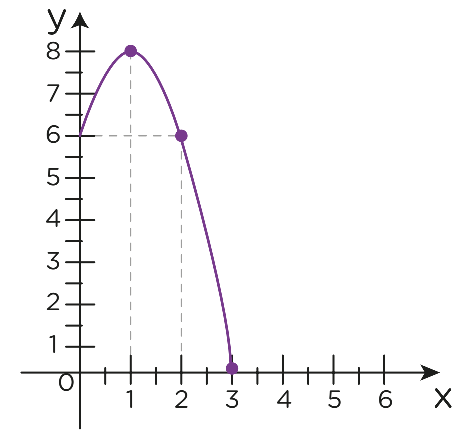


Gráfico 2

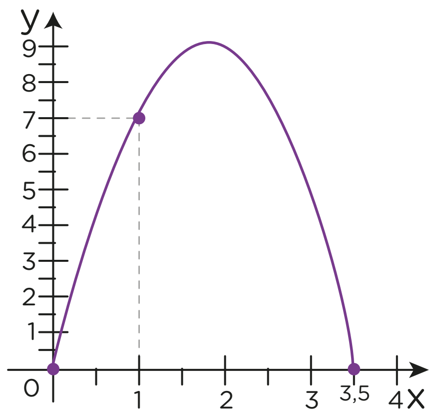


Gráfico 3

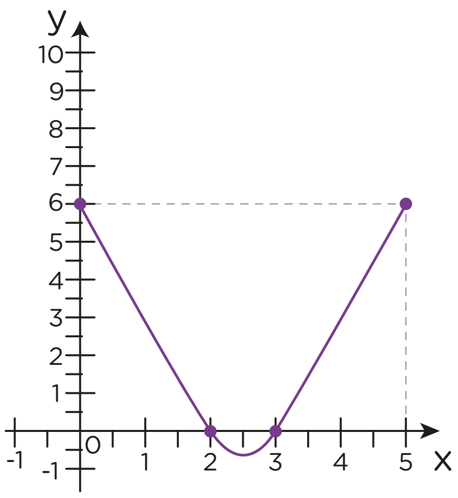
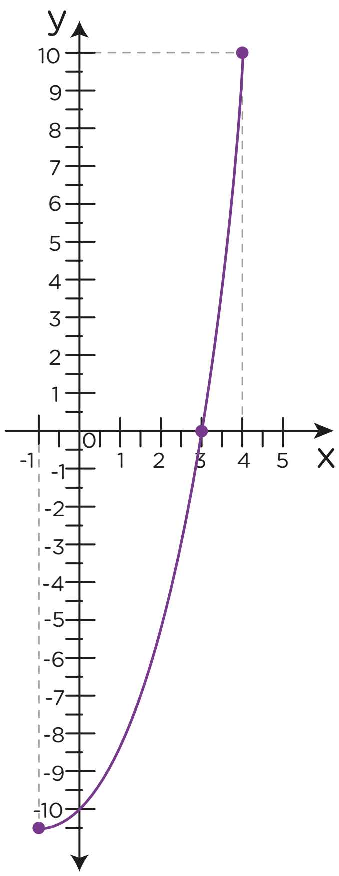


Gráfico4



A partir de la información dada en los gráficos, enunciados y fórmulas anteriores, responda las siguientes consignas:

a) Determine cuál es el gráfico y cuál es la fórmula que corresponde a cada una de las situaciones enunciadas. Una vez que lo haya hecho, vuelque la información en el cuadro que le damos a continuación.

	Situación A	Situación B	Situación C	Situación D
Gráfico n.°				
Fórmula				

b) Para cada una de las funciones que expresan a las situaciones anteriores, determine:

- El Dominio de la función.
- El conjunto imagen de la función.
- La imagen de cero u ordenada al origen de la función. En símbolos f (0).
- Los ceros de la función (si existen).
- Los intervalos de positividad y negatividad de la función (si existen).
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Los máximos o mínimos de la función.

c) Exprese cada una de sus respuestas a las preguntas del ítem 2 en términos de cada una de las situaciones concretas enunciadas. Por ejemplo: el dominio de la situación A es el intervalo de tiempo, entre la 0 hora y las 4 horas, durante el que se observan las posiciones del submarino.

2. Represente la función $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(x) = x^2$ a partir de los valores que obtenga al completar la siguiente tabla:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$							

Represente la función $g : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, g(x) = (x - 1)^2$.

Represente la función $h : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, h(x) = x^2 + 1$.

3. Dada la función $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$.

a. Halle la ecuación del eje de simetría de la parábola.

b. Halle los ceros o raíces.

c. Halle la ordenada al origen ($f(0)$).

d. Halle el vértice de la parábola.

e. Grafique la función f .

Actividad 9

Parte A

El volumen de un objeto en un instante determinado, que llamaremos $x = 0$, es de 1 metro cúbico y se observa que dicho volumen se duplica cada hora. Nombramos con la letra x al tiempo (en horas) transcurrido desde el instante 0 y con la letra y al volumen del objeto.

1. Complete la siguiente tabla:

x (en horas)	0	1	2	3	4	5	6	7
y (en metros cúbicos)	*1*	$1 \cdot 2 = 2$	$1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$	$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$				

2. Escriba una fórmula que permita calcular el volumen del objeto en cada instante.

3. Utilice la fórmula para determinar el volumen del objeto a la hora 10.

4. Utilice la fórmula para completar la siguiente tabla, donde los valores negativos de x indican instantes previos al $x = 0$:

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y								

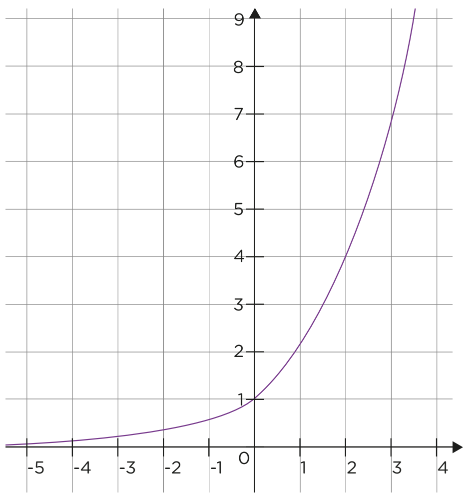
5. Grafique la función que a cada instante le hace corresponder el volumen del objeto.

Orientaciones

La tabla se puede completar de la siguiente manera:

x (en horas)	0	1	2	3	4	5	6	7
y (en metros cúbicos)	$1 = \mathbf{1 \cdot 2^0}$	$1 \cdot 2 = \mathbf{1 \cdot 2^1}$	$1 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{1 \cdot 2^2}$	$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{1 \cdot 2^3}$	$\mathbf{1 \cdot 2^4}$	$\mathbf{1 \cdot 2^5}$	$\mathbf{1 \cdot 2^6}$	$\mathbf{1 \cdot 2^7}$

Entonces la fórmula que permite escribir el volumen en función del tiempo es $y = 1 \cdot 2^x$ o $y = f(x) = 2^x$ y su representación gráfica es la siguiente:



Actividad 10

Luis Alberto deposita \$10.000 a principios de enero mediante un plazo fijo en un banco.

El interés mensual ofrecido por el banco es del 2% sobre el dinero depositado. Es decir, que al cumplirse un mes del depósito, a este se le agrega una suma equivalente al 2% de la cantidad depositada. Si el cliente no retira el dinero, el plazo fijo se renueva automáticamente en las mismas condiciones ya indicadas.

Responda las siguientes preguntas:

1. Al mes de haber hecho el depósito,

a) ¿Cuánto dinero se agrega al capital depositado?

b) ¿Cuánto dinero hay en el plazo fijo de Luis Alberto a comienzos de febrero?

2. Luis Alberto deja todo ese dinero depositado durante otro mes. A principios de marzo,

a) ¿Cuánto dinero se agrega a su plazo fijo?

b) ¿Cuánto dinero tiene Luis Alberto en el plazo fijo entonces?

3. Luis Alberto confía en el banco y deja depositado durante otro mes todo el dinero obtenido hasta el momento. A principios de abril,

a) ¿Cuánto dinero se agrega a su plazo fijo?

b) ¿Cuánto dinero tiene Luis Alberto en dicho plazo fijo?

4. Escriba una fórmula que permita determinar cuánto dinero tendrá Luis Alberto en su plazo fijo a comienzos del mes t.

Orientaciones

Repasemos las cuentas que hizo para contestar las preguntas anteriores para construir una fórmula que permita calcular el capital después de una cantidad de meses de efectuado el depósito.

Para calcular el interés del primer mes, calculamos el 2% de 10.000 esto es:

$$\frac{2}{100} \cdot 10.000 = 0{,}02 \cdot 10.000 = 200$$

Esta suma se agrega a los \$10.000. Por lo tanto, a fines de enero tendrá \$ 10.200 en su plazo fijo

También podríamos plantear el cálculo de la cantidad de dinero que dispondrá Luis Alberto a principios de febrero del siguiente modo: $10.000 + 0{,}02 \cdot 10.000$, que también podemos escribir $10.000 \cdot (1 + 0{,}02) = 10.000 \cdot 1{,}02 = 10.200$.

Para calcular el interés del segundo mes, calculamos el 2 % de 10.200. Esto es:

$0{,}02 \cdot 10.200 = 204$ y a esta suma se le agregan los \$10.200 para determinar la cantidad de dinero que dispondrá a comienzos de marzo. Esto es:

$10.200 + 0{,}02 \cdot 10.200 = 10.200 \cdot (1 + 0{,}02) = 10.404$.

Pero, como vimos, $10.000 \cdot (1 + 0{,}02) = 10.200$. Por lo tanto podemos escribir la cuenta anterior así: $10.000 \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}02) = 10.000 \cdot (1 + 0{,}02)^2 = 10.000 \cdot 1{,}02^2$.

Para calcular el interés del tercer mes, calculamos el 2 % de 10.404. Esto es $0{,}02 \cdot 10.404 = 208{,}08$

Esta suma se agrega a los \$ 10.404. Esto es:

$10.404 + 0{,}02 \cdot 10.404 = 10.404 \cdot (1 + 0{,}02) = 10.612{,}08$.

A los 4 segundos el objeto está a 65.536 metros de altura, y a los 5 segundos a 1.048.576 metros de altura. Seguimos probando con la calculadora para valores de *x* entre 4 y 5.

164,25 = 131.072

164,5 = 262.144

164,75 = 524.288

Por lo tanto, a los 4,75 segundos el objeto está a 524.288 metros de altura.

Escribimos log16 524.288 = 4,75 dado que 164,75 = 524.288.

Debemos determinar, finalmente, para qué valor de *x* es 40.000.000 = 16*x*.

165 = 1.048.576

166 = 16.777.216

Si a 16.777.216 lo multiplicamos por 16, claramente el resultado superará a 40.000.000, por lo que en lugar de hacer «16 elevado a la 7», probaremos con valores de *x* entre 6 y 7.

166,1 ≅ 22.137.669

166,2 ≅ 29.210.830

166,3 ≅ 38.543.920

166,4 ≅ 50.859.008

Seguimos probando con valores de *x* entre 6, 3 y 6,4.

166,31 ≅ 39.627.537

166,32 ≅ 40.741.620

166,313 ≅ 39.958.525

166,3133 ≅ 39.991.776

Y podemos seguir buscando mejores aproximaciones.

La respuesta a la quinta pregunta es que el objeto alcanza los 40.000.000 de metros de altura a los 6,3133 segundos, aproximadamente y log16 40.000.000 ≅6,3133 dado que 166,3133 es un número muy «cercano» a 40.000.000.

Logaritmo

El **logaritmo en base *a* de un número *b*** positivo es el número *c* al que hay que elevar *a* para obtener como resultado el número *c* , con *a* positivo y distinto de 1.

En símbolos $\log_a b = c$ si y solo si $a^c = b$.

Ejemplos fáciles de calcular:

$\log_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$

$\log_5 1 = 0$ ya que $5^0 = 1$

$\log_7 7^{37} = 37$ ya que $7^{37} = 37$

Los logaritmos en base 10 se llaman logaritmos decimales y para ellos se usa la notación log, es decir, no se indica la base. Las calculadoras científicas disponen de la tecla log para calcular logaritmos en base diez.

Ejemplo: $\log 100 = 2$ ya que $10^2 = 100$

Actividad 13

Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cdot 5^x + 7 = 29$

b) $4 \cdot \log_3 x - 7 = 1$

Orientaciones

a)

$2 \cdot 5^x + 7 = 29$

$2 \cdot 5^x = 29 - 7$

$2 \cdot 5^x = 22$

$5^x = 22 : 2$

$5^x = 11$

$x = \log_5 11$

Entonces, $\log_5 11$ es la única solución de la ecuación y con el uso de la calculadora:

$$\log_5 11 = \frac{\log 11}{\log 5} \cong 1{,}4899$$

b)

$4 \cdot \log_3 x - 7 = 1$

$4 \cdot \log_3 x = 1 + 7$

$4 \cdot \log_3 x = 8$

$\log_3 x = 8 : 4$

$\log_3 x = 2$

Entonces $x = 3^2 = 9$ es la única solución de la ecuación.

Actividad 14

Resuelva los siguientes problemas:

1. Grafique la función $f(x) = 3^x$.

a) ¿Es f una función estrictamente creciente? ¿Es f una función estrictamente decreciente?

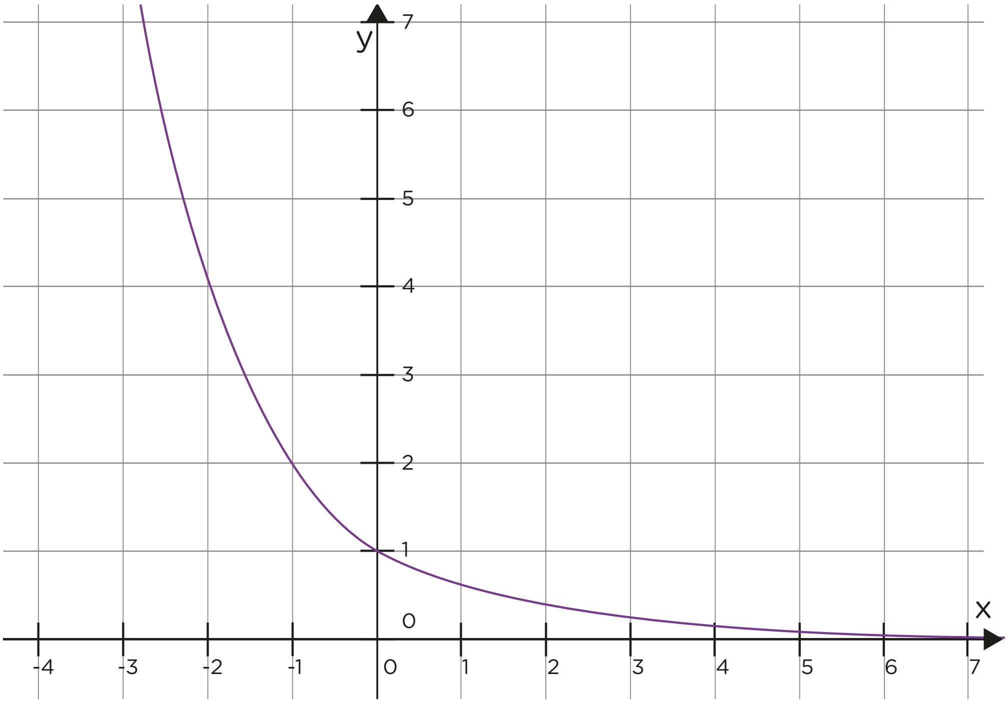
b) Indique, si es posible, un valor $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) > 12.000$.

c) Indique, si es posible, un valor $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(b) < 0$.

d) Halle el conjunto solución de la ecuación $f(x) = 3^x = 145.207$.

e) Halle el conjunto solución de la ecuación $f(x) = 3^x = -25$.

4. Solo una de las fórmulas indicadas a continuación se corresponde con la siguiente representación gráfica:



Indique cuál es:

a) $y = 0{,}25^x$

b) $y = 0{,}5^x$

c) $y = 2^x$

d) $y = 4^x$

5. Indique cuál es la única solución de la ecuación exponencial $2 \cdot 4^x + 3 = 20$.

a) $\sqrt[4]{\frac{17}{2}}$ b) $\log_4 (\frac{17}{2})$ c) $\log_4 7$ d) $\sqrt[4]{7}$

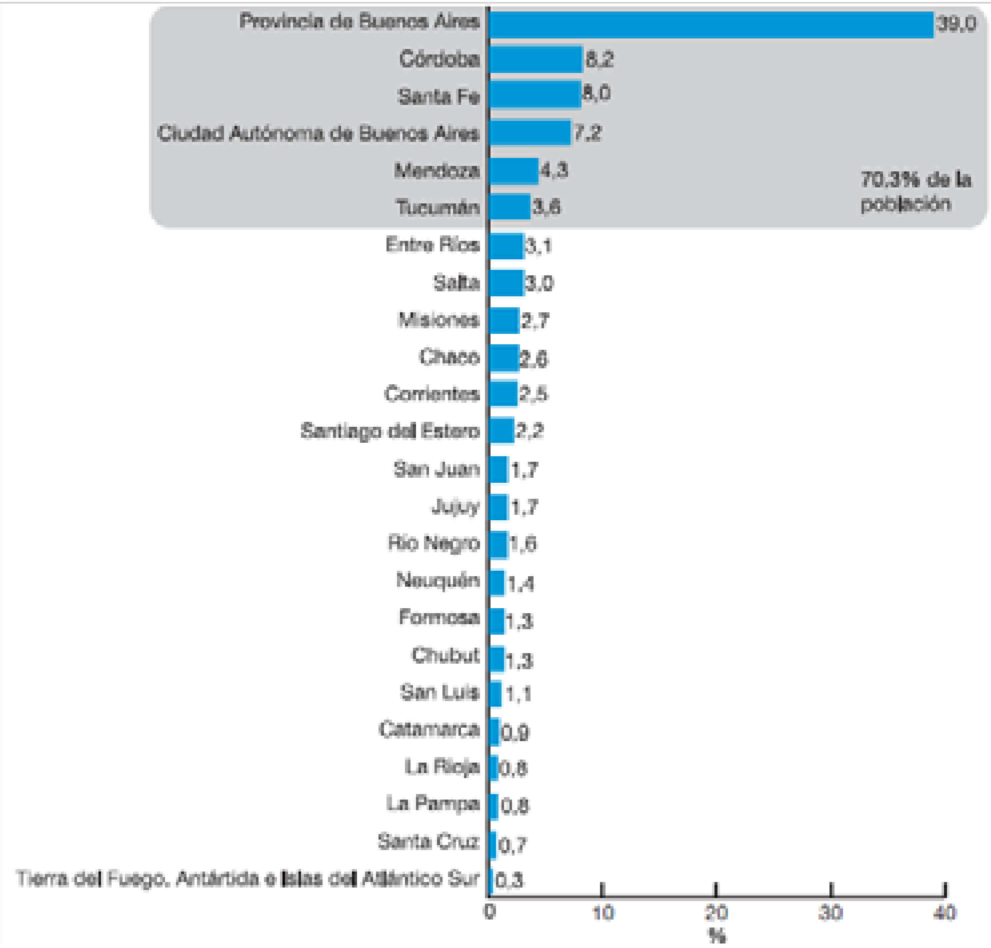
6. Indique cuál es la única solución de la ecuación logarítmica $8\log_2(x + 1) = 40$:

a) 31 b) 33 c) $\log_2 5 - 1$ d) $\log_2(\frac{40}{8} - 1)$

Actividad 2

Observe el siguiente gráfico:

«Distribución relativa de la población por provincia. Total del país. Año 2010».



Fuente: *INDEC. Censo Nacional de Población, Hogares y Vivienda 2010.*

a) ¿Cuál es la provincia con mayor población en la Argentina?

b) ¿Qué población fue la de la provincia de Buenos Aires, según el censo de 2010?

c) ¿Qué población fue la de la provincia de Tierra del Fuego e Islas del Atlántico Sur según el censo de 2010?

Orientaciones

En el gráfico de la actividad anterior, observamos que la población de la Argentina fue de 40.117.096 habitantes en el año 2010. Entonces la población de la provincia de Buenos Aires fue de 15.645.667, dado que (39 : 100) · 40.117.096 = 15.645.667. En Tierra del Fuego la población fue de 120.351 habitantes.

Parte A

A partir de la información anterior, responda las siguientes preguntas:

1. La encuesta de la consultora, ¿se realizó a todos los consumidores de chicles de marca Superglobo de la ciudad de Buenos Aires?

2. Si su respuesta a la pregunta anterior es negativa, indique cuál es la cantidad de consumidores que fue encuestada.

3. ¿Podría usted estimar qué cantidad de consumidores de chicles de marca Superglobo de la ciudad de Buenos Aires prefieren chicles de uva? En caso de que su respuesta sea afirmativa, indique de qué modo lo haría y cuál es la cantidad de consumidores obtenida. Si considera que no es posible estimar dicha cantidad indique la/s razón/es por la/s cual/es no puede hacerlo.

4. ¿Cuál es el sabor más elegido por los consumidores?

Parte B

Responda las siguientes consignas:

1. Exprese cada uno de los valores de la tabla como fracción de la cantidad total de encuestados.

2. Agregue una columna a la tabla anterior y vuelque en ella cada uno de los valores determinados en el ítem 1.

3. ¿Cuánto vale la suma de todos los valores de esta columna? ¿Por qué?

4. Escriba el porcentaje de consumidores que prefiere cada uno de los sabores que elabora la fábrica.

5. A partir de las respuestas a los ítems anteriores, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la cantidad esperable de consumidores de chicles de menta de marca Superglobo en la ciudad de Buenos Aires?

b) ¿Es posible que en la ciudad de Buenos Aires haya 800 consumidores de chicles de menta de marca Superglobo? Escriba las razones que le permiten decidir su respuesta.

c) ¿Es posible que haya 5.000 consumidores de esos chicles? Escriba las razones que le permiten decidir su respuesta.

Orientaciones

La encuesta realizada a un grupo de consumidores de chicles de marca Superglobo en la ciudad de Buenos Aires puede darnos información sobre el resto de los consumidores de la ciudad. Pero debemos ser cuidadosos con el manejo de esa información. Es importante tener en cuenta que cualquier estimación que hagamos sobre el total de consumidores de chicles de la ciudad, basándonos en los resultados de la encuesta, puede coincidir o no con los valores reales de este grupo.

La encuesta que estamos analizando se realizó a 1.000 consumidores del producto en la ciudad de Buenos Aires. De ellos, el 44,1 % respondió que prefiere chicles sabor menta. A partir de este valor sería **esperable** que, de los 15.000 consumidores que supone tener esta fábrica en la ciudad de Buenos Aires, 6.615 prefieran chicles de sabor menta. De todos modos, más allá de lo esperable a partir de los resultados obtenidos con la encuesta, puede ocurrir que el grupo de consumidores no encuestados tenga los mismos hábitos de consumo que el grupo encuestado o no; o que un sinnúmero de razones influya en el nivel de consumo del resto de los consumidores.

Población. Muestra. Distribución de frecuencias. Frecuencia absoluta. Frecuencia relativa

En la situación que estamos analizando, llamamos **población** al conjunto de todos los consumidores de chicles de marca Superglobo en la ciudad de Buenos Aires.

En general, llamamos **población** al conjunto formado por todos los elementos cuyo estudio nos interesa.

Con frecuencia, es imposible, o demasiado costoso, recopilar los datos correspondientes a una población completa. Por eso, para analizar las características de la población, se trabaja solo con un subconjunto de la misma. En nuestro ejemplo, este subconjunto está formado por los consumidores de chicles Superglobo que fueron encuestados. A este subconjunto lo llamamos **muestra**.

Llamamos **observación** a cada dato obtenido sobre cada elemento de la muestra. Los datos obtenidos a través de encuestas, censos u otros medios, son grupos de valores en principio desorganizados. Para poder obtener, a partir de ellos, conclusiones sobre la población que se está investigando, deben previamente ordenarse y organizarse. Una forma de hacerlo es construir **tablas** y **gráficos** que los representen.

A una tabla como la presentada en la situación que estamos analizando, las llamamos **tabla de frecuencia** o **distribución de frecuencias**. En ella, la primera columna representa a los valores que toma la variable, y la segunda representa a la cantidad de observaciones registradas para cada uno de esos valores.

Llamamos **frecuencia absoluta** a cada una de las cantidades de esta segunda columna. Por lo general nombramos a esta columna directamente como frecuencia absoluta. En símbolos: **f**.

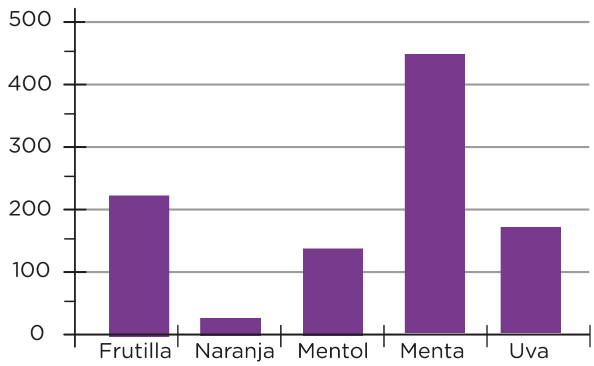
Para poder extender los datos proporcionados por una muestra a la población completa, o establecer comparaciones con resultados obtenidos en otras muestras de la misma población, es conveniente expresar el resultado de las observaciones como fracción del total. A cada uno de estos valores lo llamamos **frecuencia relativa**, y la columna de la tabla en la que registramos a cada uno de ellos, la identificamos también con ese nombre. En símbolos **fr**.

También es útil expresar las cantidades observadas como porcentajes del total de encuestados.

Para representar gráficamente la información relevada podemos usar **gráficos de barras** y **gráficos circulares**, entre otros tipos de gráficos.

Los gráficos de barras se construyen en un sistema de coordenadas cartesianas. Si el gráfico es de barras verticales, en el eje horizontal se registran los valores de la variable y en el eje vertical se registran las frecuencias correspondientes a cada uno de los valores de la variable. Si el gráfico es de barras horizontales, se registran los valores de la variable en el eje vertical y las frecuencias en el eje horizontal.

El gráfico de barras que representa a las preferencias de los consumidores de chicles marca Superglobo encuestados es:



7. ¿Cuántos de los consumidores encuestados compran semanalmente hasta 4 paquetes de chicles?

Orientaciones

Para responder las dos últimas preguntas, resulta útil agregar a la distribución de frecuencias una columna en la que se registren en forma acumulada la cantidad de observaciones registradas hasta cada valor de la variable.

Paquetes de chicles comprados semanalmente	Candidad de compradores	Cantidad acumulada de compradores
1	8	8
2	32	8 + 32 = 40
3	78	40 + 78 = 118
4	142	118 + 142 = 260
5	120	260 + 120 = 380
6	56	380 + 56 = 436
7	5	436 + 5 = 441

En la columna agregada es más sencillo leer la información necesaria para responder.

Allí vemos que son 118 los consumidores encuestados que compran menos de 4 paquetes de chicles semanales y que son 260 los que compran hasta 4 paquetes semanalmente.

Frecuencia acumulada

A la columna agregada a la distribución anterior la llamamos **frecuencia acumulada** y la simbolizaremos **Fa** o **Fac**.

Actividad 7

1. ¿Cuál es la cantidad de paquetes de chicles de menta que los consumidores compran más frecuentemente?

2. ¿Cuántos paquetes de chicles de menta compran en total los consumidores encuestados por semana? Escriba las cuentas que realiza para calcular este valor.

3. ¿Cuál es la cantidad de consumidores que compran semanalmente la cantidad de paquetes de chicles que calculó en el ítem 2?

4. ¿Qué cantidad promedio de paquetes de chicles de menta compra semanalmente cada consumidor encuestado?

5. Si usted fuera el dueño de la fábrica Superglobo, ¿qué cantidad de paquetes de chicles de menta debería fabricar semanalmente para cubrir la demanda en la ciudad de Buenos Aires? Para responder, tenga en cuenta la estimación que hizo en la actividad 4 sobre la cantidad de consumidores de chicles de menta de la ciudad de Buenos Aires.

6. ¿Podría ocurrir que la cantidad calculada en el ítem 5 fuera excesiva o insuficiente? ¿Por qué?

7. Determine el valor de la variable correspondiente a la observación central, es decir a la observación que divide al total de observaciones en dos conjuntos de igual cantidad de elementos.

En general, la media de una población o muestra es el promedio de todas las observaciones realizadas.

En el caso de la media de una muestra la simbolizamos $\bar{x}$.

Actividad 8

Las edades de los estudiantes de un curso son: 22; 20; 22; 21; 23; 20, 24; 22; 23; 21; 22; 20; 23; 21.

Organice la información en una tabla de frecuencias absolutas.

Orientaciones

Organizamos la información en una tabla de dos columnas, en la de la izquierda irán las distintas edades ordenadas de menor a mayor, y en la columna de la derecha sus respectivas frecuencias absolutas.

Edad	Frecuencia
20	3
21	3
22	4
23	3
24	1

Actividad 9

Las alturas (en metros) de los estudiantes de un curso de quinto año son las siguientes:

1,65; 1,52; 1,78; 1,85; 1,75; 1,65; 1,55; 1,64; 1,74; 1,80; 1,79; 1,59; 1,53; 1,66; 1,54; 1,62; 1,76; 1,83; 1,85; 1,65.

Organice la información en una tabla de frecuencias absolutas.

Orientaciones

Teniendo en cuenta la gran diversidad de datos, vamos a clasificar los mismos en intervalos. Por ejemplo, las alturas mayores o iguales a 1,50 y menores que 1,60 estarán dentro del intervalo [1,50 ; 1,60).

Altura	Frecuencia absoluta
[1,50 ; 1,60)	5
[1,60 ; 1,70)	6
[1,70 ; 1,80)	5
[1,80 ; 1,90)	4

Actividad 11

Resuelva:

1. Responda cada uno de los siguientes ítems:

a) Se presentó una lista con 40 notas correspondientes al examen de Matemática B del turno de marzo:

- Describa una situación en la que estas 40 notas representen a las observaciones sobre una población.
- Describa una situación en la que estas 40 notas representen a las observaciones sobre una muestra.
- Si se presenta la lista sin ninguna otra información que la dada en el enunciado del ejercicio, ¿es posible determinar si esas 40 notas representan a observaciones de una población o de una muestra de la misma?

b) En el Departamento de Control de Calidad de la fábrica de lamparitas «Masluz», seleccionan para su control una de cada 200 lamparitas fabricadas. El conjunto de lamparitas controladas, ¿representa a la población o a una muestra de la misma?

c) En un grupo de autoayuda para bajar de peso, se pesa a todos los participantes el día de comienzo del tratamiento. El conjunto de personas pesadas, ¿representa a la población o a una muestra de la misma?

d) En una fábrica de productos lácteos están probando la eficacia de un nuevo conservante. Para ello necesitan medir el tiempo de duración de cada uno de sus productos. ¿Deberían hacer el análisis sobre una muestra o sobre la población? ¿Por qué?

2. Determine qué tipo de variable es la involucrada en cada una de las siguientes situaciones:

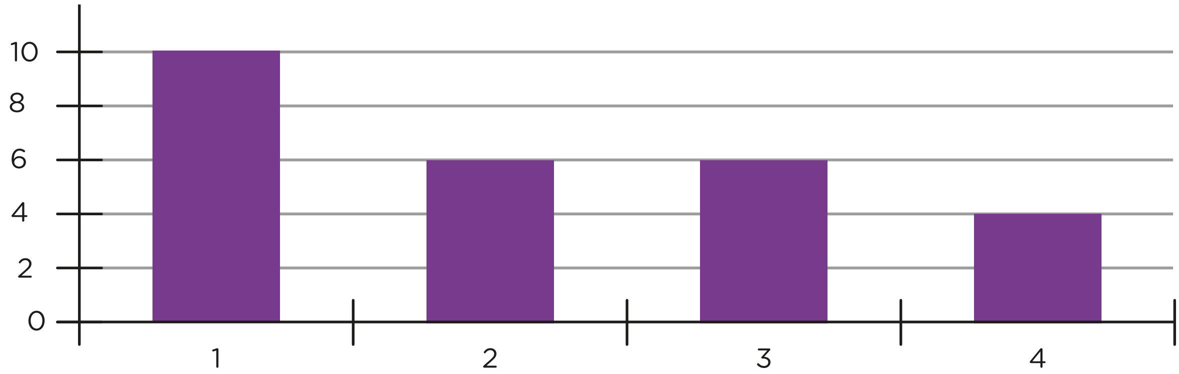
- Edad de los aspirantes a un trabajo.
- Tiempo de demora del servicio de subterráneos durante el mes de Abril.
- Asignaturas preferidas por los estudiantes de una escuela.
- Pesos de los bebés nacidos en el hospital Ramos Mejía.
- Talla de los bebés nacidos en el hospital Ramos Mejía.
- Notas de los exámenes de Matemática del turno de marzo.
- Cantidad de goles de una fecha del campeonato de fútbol.

3. En el club de fútbol infantil necesitan comprar botines para los 30 jugadores. Se tomó nota del número de calzado de cada uno de los chicos y se confeccionó la siguiente tabla:

Número de calzado	Cantidad de chicos
29	1
30	2
31	12
32	8
33	1
34	1
35	1

a) ¿Qué tipo de variable es la utilizada en la distribución anterior?

3.

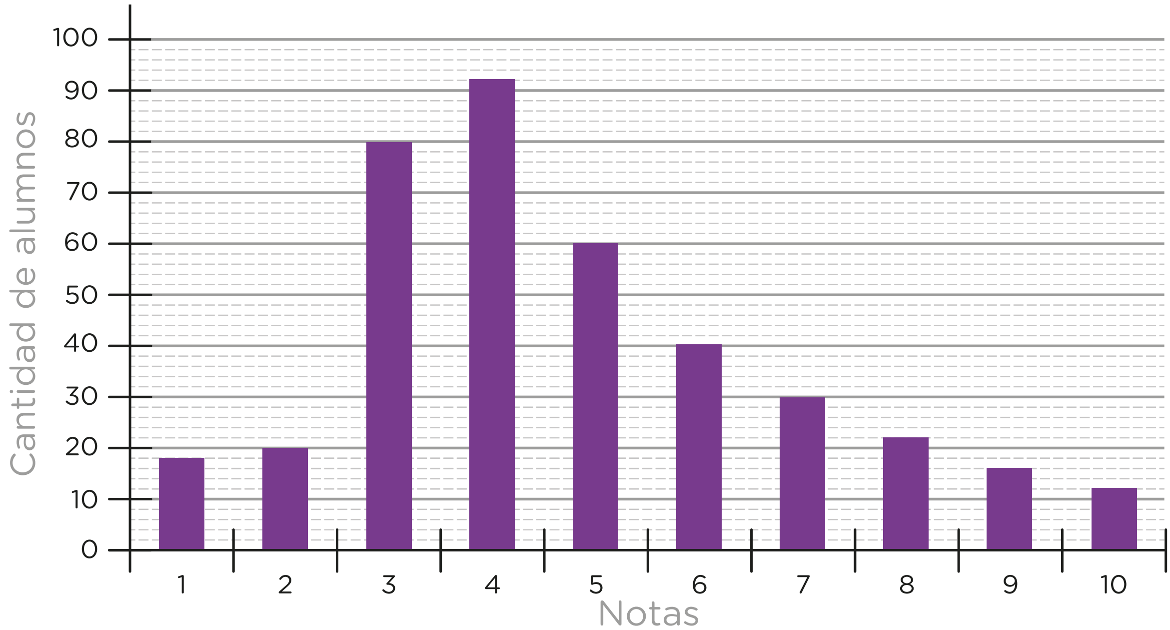


A partir de la observación del diagrama de barras y sin realizar cálculos, determine si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «La media es 3,9».

a) Verdadera.

b) Falsa.

4. La siguiente representación gráfica describe la distribución de las notas de un examen de los estudiantes de un curso universitario.



Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) 550 estudiantes se presentaron a rendir examen.

b) La moda es 4.

c) 38 estudiantes obtuvieron un 2.

d) La media es 8,32.

5. La siguiente tabla está incompleta pero se sabe que la única moda es 5.

x	Frecuencia absoluta
2	7
3	21
4	18
5	

Vamos Buenos Aires

adultos2000@bue.edu.ar 0800 444 2400